

ساختار کتاب

کتاب شب امتحان ریاضیات گسسته از ۴ قسمت اصلی به صورت زیر تشکیل شده است:

(۱) **آزمون‌های نوبت اول:** آزمون‌های شماره ۱ تا ۴ این کتاب مربوط به مباحث نوبت اول است که خودش به دو قسمت تقسیم می‌شود:

الف) آزمون‌های طبقه‌بندی‌شده: آزمون‌های شماره ۱ و ۲ را فصل به فصل طبقه‌بندی کرده‌ایم. بنابراین شما به راحتی می‌توانید پس از خواندن هر فصل از درس‌نامه تعدادی سؤال را بررسی کنید. حواستان باشد این آزمون‌ها ۲۰ نمره‌ای و مثل یک آزمون کامل هستند. در کنار سؤال‌های این آزمون‌ها نکات مشاوره‌ای نوشته‌ایم. این نکات به شما در درس خواندن قبل از امتحان و پاسخگویی به آزمون در زمان امتحان کمک می‌کند.

ب) آزمون طبقه‌بندی‌نشده: آزمون‌های شماره ۳ و ۴ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم تا دو آزمون نوبت اول، مشابه آزمونی که معلمان از شما خواهد گرفت، ببینید.

(۲) **آزمون‌های نوبت دوم:** آزمون‌های شماره ۵ تا ۱۲، امتحان‌های نهایی برگزار شده در سال‌های ۹۸، ۹۹، ۱۴۰۰ و ۱۴۰۱ هستند. این قسمت هم، خودش به ۲ بخش تقسیم می‌شود:

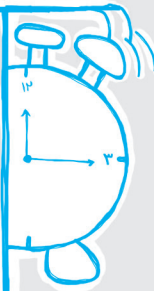
الف) آزمون‌های طبقه‌بندی‌شده: آزمون‌های شماره ۵ تا ۸، امتحان‌های نهایی خرداد ۹۸، خرداد و شهریور ۹۹، دی ۱۴۰۰ هستند که طبقه‌بندی کرده‌ایم. با این کار باز هم می‌توانید پس از خواندن هر فصل تعدادی سؤال مرتبط را پاسخ دهید. هر کدام از این آزمون‌ها، ۲۰ نمره دارند در واقع در این بخش، شما ۴ آزمون کامل را می‌بینید. این آزمون‌ها هم نکات مشاوره‌ای دارند.

ب) آزمون‌های طبقه‌بندی‌نشده: آزمون‌های شماره ۹ تا ۱۲ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم. این آزمون‌ها به ترتیب امتحان‌های نهایی خرداد ۱۴۰۰، خرداد ۱۴۰۱، شهریور ۱۴۰۰ و شهریور ۱۴۰۱ هستند.

(۳) **پاسخ‌نامه تشریحی آزمون‌ها:** در پاسخ تشریحی آزمون‌ها تمام آن‌چه را که شما باید در امتحان بنویسید تا نمره کامل کسب کنید، برایتان نوشته‌ایم.

(۴) **درس‌نامه کامل شب امتحانی:** این قسمت تمام آن‌چه را که شما برای گرفتن نمره عالی در امتحان ریاضیات گسسته نیاز دارید، تنها در ۱۶ صفحه آورده‌ایم، بخوانید و لذتش را ببرید!

یک راهکار: موقع امتحان‌های نوبت اول می‌توانید از سؤال‌های فصل‌های اول و دوم آزمون‌های ۵ تا ۸ هم استفاده کنید.



فهرست

بازمبندی درس ریاضیات گسسته


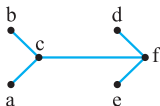
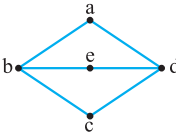
| شماره فصل | نوبت اول | نوبت دوم | شهریور و دی |
|-----------|----------|----------|-------------|
| فصل اول | ۱۵ | ۵ | ۷ |
| فصل دوم | ۵ | ۲ | ۶ |
| | - | ۵ | |
| فصل سوم | - | ۸ | ۷ |
| جمع | ۲۰ | ۲۰ | ۲۰ |

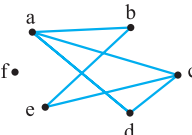
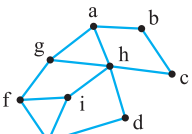
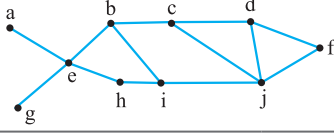
صفحه
آزمون
پاسخ‌نامه

نوبت

| | | | | |
|-----------------------------|-------------------|-----|----|----|
| آزمون شماره ۱ | (طبقه‌بندی‌شده) | اول | ۳ | ۲۰ |
| آزمون شماره ۲ | (طبقه‌بندی‌شده) | اول | ۵ | ۲۱ |
| آزمون شماره ۳ | (طبقه‌بندی‌نشده) | اول | ۶ | ۲۲ |
| آزمون شماره ۴ | (طبقه‌بندی‌نشده) | اول | ۷ | ۲۳ |
| آزمون شماره ۵ | نهایی خرداد ۹۸ | دوم | ۸ | ۲۵ |
| آزمون شماره ۶ | نهایی خرداد ۹۹ | دوم | ۱۰ | ۲۶ |
| آزمون شماره ۷ | نهایی شهریور ۹۹ | دوم | ۱۲ | ۲۷ |
| آزمون شماره ۸ | نهایی دی ۱۴۰۰ | دوم | ۱۴ | ۲۸ |
| آزمون شماره ۹ | نهایی خرداد ۱۴۰۰ | دوم | ۱۵ | ۲۹ |
| آزمون شماره ۱۰ | نهایی خرداد ۱۴۰۱ | دوم | ۱۶ | ۳۰ |
| آزمون شماره ۱۱ | نهایی شهریور ۱۴۰۰ | دوم | ۱۸ | ۳۱ |
| آزمون شماره ۱۲ | نهایی شهریور ۱۴۰۱ | دوم | ۱۹ | ۳۲ |
| درس‌نامه توپ برای شب امتحان | | | | ۳۴ |

| شماره | ریاضیات گسسته | رشته: ریاضی فیزیک | مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه | kheilisabz.com | شماره |
|----------------|--|-------------------|---|----------------|-----------------------|
| ردیف | آزمون شماره ۱ | | | | نوبت اول پایه دوازدهم |
| فصل اول | | | | | |
| ۱ | الف) آیا اعداد صحیحی مانند x و y وجود دارند که: $x^2 + y^2 = (x + y)^2$ ب) آیا مقادیر حقیقی و غیر صفر x و y وجود دارند که: $x + y \neq 0$ و $\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ | ۱/۵ | | | |
| ۲ | جاهای خالی را پر کنید. الف) $[-4, 16] = \dots\dots\dots$ ب) اگر $a \mid b$ ، آن گاه $(a, b) = \dots\dots\dots$ پ) اگر p عددی اول باشد و a عددی طبیعی و $a \mid p$ در این صورت $a = \dots\dots\dots$ یا $a = \dots\dots\dots$. | ۱ | | | |
| ۳ | درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید. الف) $\begin{cases} a \equiv b \Rightarrow a^n \equiv b^n \\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$ ب) $ac \equiv bc \Rightarrow a \equiv b$ پ) شرط لازم و کافی برای آن که معادله سیاله $ax + by = c$ دارای جواب باشد آن است که $c \in [a, b]$. ت) در مسائل تقویم‌نگاری از هم‌نهشتی به پیمانده γ استفاده می‌شود. | ۱ | | | |
| ۴ | اگر x و y گنگ ولی $x + y$ گویا باشد، ثابت کنید: $x - y$ و $x + 2y$ گنگ هستند. (به روش برهان خلف) یادت باشه در روش برهان خلف، فرض می‌کنیم کلمه برقرار نباشد. | ۱ | | | |
| ۵ | به روش بازگشتی برای هر x و y حقیقی که $x + y > 0$ باشد، ثابت کنید: $\frac{x^3 + y^3}{x + y} \geq xy$ | ۱/۵ | در روش بازگشتی هر وقت به یک عبارت همواره درست رسیدی کار تمام است. | | |
| ۶ | خاصیت تعدی در رابطه عادی کردن را بیان و اثبات نمایید. | ۱/۲۵ | گفته: بیان و اثبات. | | |
| ۷ | اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم‌علیه هر دو بر عدد صحیح n بخش پذیر باشند، ثابت کنید باقی‌مانده تقسیم نیز همواره بر n بخش پذیر است. | ۱/۲۵ | بخش پذیر بودن یعنی باقی‌مانده صفر داشتن. | | |
| ۸ | اگر باقی‌مانده تقسیم عدد a بر دو عدد 6 و 7 به ترتیب 3 و 4 باشد، باقی‌مانده تقسیم a بر 42 را بیابید. | ۱/۲۵ | | | |
| ۹ | اگر $a \equiv b \pmod{m}$ و $c \in \mathbb{Z}$ ، آن‌گاه ثابت کنید: $a \pm c \equiv b \pm c \pmod{m}$ | ۱/۲۵ | | | |
| ۱۰ | باقی‌مانده تقسیم عدد $A = (22)^6 + 16$ را بر 11 بیابید. | ۱/۲۵ | | | |
| ۱۱ | تمام اعداد صحیحی که 7 برابر آن‌ها منهای 3 بر 9 بخش پذیر باشند را بیابید. | ۱/۲۵ | اول سعی کن صورت سوال را به زبان ریاضی بنویسی. | | |
| ۱۲ | نشان دهید معادله سیاله $6x + 14y = 10$ در مجموعه اعداد صحیح جواب دارد. سپس آن را حل کنید. | ۱/۵ | | | |
| فصل دوم | | | | | |
| ۱۳ | برای دو نمودار مقابل با نوشتن مجموعه‌های $V(G)$ و $E(G)$ برای هر کدام، نشان دهید هر دو یک گراف را نمایش می‌دهند. | ۱ |  | | |

|  | kheilisabz.com | مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه | رشته: ریاضی فیزیک | ریاضیات گسسته | |
|--|---|---|--|----------------------|----|
| نمره | نوبت اول پایه دوازدهم | | | آزمون شماره ۱ | |
| ۱/۵ |  <p>یادت که هست در گراف ۳- منتظم، درجه همه رئوس ۳ است.</p> | نمودار گراف G به صورت مقابل است: الف) درجات رئوس گراف G را بنویسید. ب) چه یال‌هایی به گراف G اضافه کنیم تا گراف ۳- منتظم مرتبه ۶ شود؟ | | | ۱۴ |
| ۱/۵ | <p>مواست باشه گفته یال اضافه می‌کنیم تا کامل شود. در قسمت الف) هم مرتبه و اندازه گراف اولیه را قواسته.</p> | گراف G، ۳- منتظم است و با افزودن ۶ یال به یال‌های این گراف، گراف کامل به دست می‌آید: الف) مرتبه و اندازه گراف را به دست آورید. ب) نموداری از این گراف رسم کنید. | | | ۱۵ |
| ۱ | <p>به کلمه طولانی در قسمت الف) دقت کن.</p> |  | نمودار گراف G به صورت مقابل است: الف) طولانی‌ترین مسیر از a به c را بنویسید. ب) تمام دورهای به طول ۴ را در این گراف بنویسید. | | ۱۶ |
| ۲۰ | جمع نمرات | | | موفق باشید | |

| ردیف | آزمون شماره ۹ | رشته: ریاضی فیزیک | مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه | kheilisabz.com | شماره |
|------|---|-------------------|--|----------------|-------|
| ۱ | درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را مشخص کنید. الف) حاصل ضرب سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش پذیر است. ب) هیچ عدد صحیحی مانند x و y وجود ندارند که رابطه $x^2 + y^2 = (x + y)^2$ برقرار باشد. | ۰/۵ | نوبت دوم پایه دوازدهم - نهایی خرداد ۱۴۰۰ | | |
| ۲ | جاهای خالی را با عدد یا کلمه مناسب پر کنید. الف) a و b اعدادی صحیح و a مخالف صفر است. اگر $a \mid b$ آن گاه عدد شمارنده عدد است. ب) m عددی صحیح است. حاصل $(2m, 6m^3)$ برابر با است. | ۰/۷۵ | | | |
| ۳ | به روش بازگشتی ثابت کنید حاصل ضرب دو عدد حقیقی، کوچک تر یا مساوی نصف مجموع مربعات آن‌ها است. | ۱/۲۵ | | | |
| ۴ | ثابت کنید اگر $p \geq 5$ عددی اول باشد، آن گاه به یکی از دو صورت $p = 4k + 1$ یا $p = 4k + 3$ نوشته می شود. | ۰/۷۵ | | | |
| ۵ | باقی مانده تقسیم عدد $A = (1000)^{25} \times 9 + 11$ را بر ۷ بیابید. | ۰/۷۵ | | | |
| ۶ | معادله $4x \equiv 1 \pmod{7}$ را حل کنید. | ۱ | | | |
| ۷ | گراف G که به صورت مقابل است را در نظر بگیرید. الف) $N_G(c)$ را با اعضا مشخص کنید. ب) بزرگ ترین درجه در گراف G مربوط به کدام رأس و چند است؟ پ) دوری به طول ۵ برای رأس a بنویسید. ت) آیا گراف G همبند است؟ | ۲ | | | |
| |  | | | | |
| ۸ | تفاوت بین مجموعه احاطه گر مینیمال و مینیمم چیست؟ توضیح دهید. | ۱ | | | |
| ۹ | در گراف شکل مقابل یک مجموعه احاطه گر مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد. | ۱ | | | |
| |  | | | | |
| ۱۰ | عدد احاطه گری گراف شکل مقابل را با ارائه راه حل، تعیین کنید. | ۱/۵ | | | |
| |  | | | | |
| ۱۱ | الف) یک گراف ۶ رأسی که γ - مجموعه آن با اندازه یک باشد، رسم کنید. ب) یک گراف ۶ رأسی که γ - مجموعه آن با اندازه دو باشد، رسم کنید. | ۱/۵ | | | |
| ۱۲ | کوتاه پاسخ دهید. می خواهیم با حروف (ب) و (ج) و ارقام ۸، ۶، ۵، ۴، ۲، ۱ رمزی شامل ۸ کاراکتر تشکیل دهیم. مطلوب است: الف) تعداد رمزهایی که هر یک از آن‌ها با یک حرف آغاز و حرف دیگر خاتمه یابد. ب) تعداد رمزهایی که در آن‌ها حروف کنار هم باشند. | ۱ | | | |
| ۱۳ | به چند طریق می توان از بین ۶ نوع گل ۱۲ شاخه گل انتخاب کرد اگر بخواهیم: از گل نوع اول حداقل یک شاخه، از گل نوع چهارم بیش از ۳ شاخه و از گل نوع ششم فقط یک شاخه انتخاب کنیم. | ۲ | | | |
| ۱۴ | مربع لاتین A را در نظر بگیرید. ابتدا سطر اول و سطر دوم مربع A را جابه جا کنید. سپس در مربع حاصل ستون دوم و سوم را جابه جا کنید و مربع حاصل را B نام گذاری کنید. متعامد بودن دو مربع لاتین A و B را بررسی کنید. | ۱/۵ | | | |
| | $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ | | | | |
| ۱۵ | در یک کلاس ۳۴ نفری، ۱۵ نفر فوتبال، ۱۱ نفر والیبال و ۹ نفر بسکتبال بازی می کنند. اگر بدانیم ۳ نفر هم فوتبال، هم والیبال و هم بسکتبال بازی می کنند و ۵ نفر فوتبال و والیبال، ۶ نفر فوتبال و بسکتبال و ۳ نفر فوتبال و بسکتبال بازی می کنند. مشخص کنید چند نفر فقط در یک رشته بازی می کنند؟ | ۱/۷۵ | | | |
| ۱۶ | الف) به چند طریق می توان ۴ کلاه متفاوت را بین ۳ نفر توزیع کرد به شرط آن که به هر نفر حداقل یک کلاه داده شود؟ ب) به چند طریق می توان ۴ کلاه متفاوت را بین ۸ نفر تقسیم کرد به شرط آن که به هر نفر حداکثر یک کلاه داده شود؟ | ۱ | | | |
| ۱۷ | ۵۴ شاخه گل را حداکثر در چند گلدان قرار دهیم تا اطمینان داشته باشیم گلدانی هست که در آن حداقل ۵ شاخه گل قرار گرفته است؟ | ۰/۷۵ | | | |
| ۲۰ | جمع نمرات | موفق باشید | | | |

پاسخنامه تشریحی

آزمون شماره ۱ (نوبت اول)

۱- الف) از حل طرفین تساوی داریم:

$$x^2 + y^2 = x^2 + y^2 + 2xy \Rightarrow 2xy = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } y = 0$$

یعنی اگر $x = 0$ باشد، برای هر y صحیحی تساوی برقرار است.

اگر $y = 0$ باشد، برای هر x صحیحی تساوی برقرار است.

اگر هر دو متغیر x و y صفر باشند، تساوی نیز برقرار است.

$$\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \Leftrightarrow \frac{1}{x+y} = \frac{x+y}{xy} \quad (\text{ب})$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 = xy \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy - xy = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + xy = 0$$

با توجه به تساوی $(x+y)^2 = xy$ ، xy همواره مثبت است. مجموع سه عبارت همواره مثبت صفر شده است. چون x و y غیرصفرند، پس مسئله جواب ندارد.

۲- الف) ک.م.م دو عدد -4 و 16 برابر 16 است.

$$a|b \Rightarrow (a, b) = |a| \quad (\text{ب})$$

$$a = p \text{ یا } a = 1 \quad (\text{پ})$$

۳- الف) درست؛ طرفین یک هم‌نهستی را می‌توان به توان عدد طبیعی n رساند.

ب) نادرست؛ وقتی عدد ناصفر c از طرفین یک هم‌نهستی حذف شود پیمانه m همواره ثابت نمی‌ماند.

$$\begin{cases} ac \equiv bc \Rightarrow a \equiv b \\ (c, m) = d \end{cases}$$

پ) نادرست؛ شرط لازم و کافی برای آن که معادله سیاله $ax + by = c$ دارای جواب باشد آن است که $(a, b) | c$.

ت) درست؛ در مسائل تقویم‌نگاری با تعداد روزهای هفته مواجه هستیم پس باید از هم‌نهستی در پیمانه 7 استفاده کنیم.

۴- فرض می‌کنیم $x - y$ گنگ نباشد، پس گویاست.

$$\begin{cases} x - y = \text{گویا} \\ (x + y) = \text{فرض مسئله گویا} \end{cases} \Rightarrow x = \text{گویا}$$

که این با فرض گنگ بودن x در تناقض است.

فرض می‌کنیم $x + 2y$ گنگ نباشد، پس گویا است.

$$\begin{cases} x + 2y = \text{گویا} \\ x + y = \text{گویا} \end{cases} \Rightarrow y = \text{گویا}$$

که این با فرض گنگ بودن y در تناقض است.

در نتیجه در هر دو قسمت، فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

۵- با توجه به این که $x + y > 0$ مثبت است، ابتدا کل نامساوی را در $x + y$ ضرب می‌کنیم. (جهت نامساوی عوض نمی‌شود).

$$\Leftrightarrow x^3 + y^3 \geq (x + y)xy$$

با توجه به اتحاد چاق و لاغر داریم:

$$\Leftrightarrow (x + y)(x^2 - xy + y^2) \geq (x + y)(xy)$$

با حذف $x + y$ از طرفین نامساوی داریم: ($x + y > 0$)

$$\Leftrightarrow (x^2 - xy + y^2) \geq xy$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0$$

رابطه آخر همواره برقرار است و تمامی قسمت‌ها برگشت‌پذیرند. پس اثبات تمام است.

۶- خاصیت تعدی: اگر $a|b$ و $b|c$ آن‌گاه $a|c$.

$$a|b \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Z}, b = aq \quad \text{اثبات خاصیت تعدی در عاد کردن:}$$

$$b|c \Rightarrow \exists q' \in \mathbb{Z}, c = bq'$$

اکنون b را از تساوی بالا در تساوی پایین جای گذاری می‌کنیم:

$$c = (aq)q' = a(qq') = aq'' \Rightarrow a|c \quad q'' \in \mathbb{Z}$$

۷- تقسیم کلی $a = bq + r$ را در نظر می‌گیریم:

طبق فرض $n|a$ و $n|b$ در نتیجه، n هر مضرب صحیحی از b را نیز عاد می‌کند؛

یعنی: برای هر $n|b$ $q \in \mathbb{Z}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} n|a \\ n|bq \end{cases} \xrightarrow{\text{قانون تفاضل}} n|a - bq$$

که $a - bq = r$ است. پس $n|r$. یعنی n بر r بخش پذیر است.

۸- طبق قضیه تقسیم:

$$a = 6q + 3 \Rightarrow 7a = 42q + 21$$

$$a = 7q' + 4 \Rightarrow 6a = 42q' + 24$$

$$\xrightarrow{\text{قانون تفاضل}} 7a - 6a = (42q + 21) - (42q' + 24)$$

$$\Rightarrow a = 42(q - q') + (21 - 24) \Rightarrow a = 42q'' - 3$$

اما (-3) به عنوان باقی‌مانده قابل قبول نیست. می‌دانیم:

$$a = 42q'' - 3 \Rightarrow a = 42k + 39 \quad \text{در نتیجه:}$$

یعنی باقی‌مانده تقسیم a بر 42 برابر 39 است.

۹- طبق تعریف هم‌نهستی، اگر $a \equiv b$ آن‌گاه $m|a - b$. مقدار صحیح c را به طرف راست اضافه و کم می‌کنیم.

$$\Rightarrow m|a + c - b - c \Rightarrow m|(a + c) - (b + c)$$

در نتیجه، طبق تعریف هم‌نهستی: $a + c \equiv b + c$

به طریق مشابه برای اثبات $a - c \equiv b - c$ داریم:

$$m|a + c - b - c \Rightarrow m|(a - c) - (b - c) \Rightarrow a - c \equiv b - c$$

$$10- \text{ابتدا } 23 \text{ را بر } 11 \text{ تقسیم می‌کنیم: } 23 = 11(2) + 1 \Rightarrow 23 \equiv 1$$

$$\text{حال طرفین را به توان } 6 \text{ می‌رسانیم: } (23)^6 \equiv 1^6 \Rightarrow (23)^6 \equiv 1$$

$$\text{با اضافه کردن } 16 \text{ به طرفین هم‌نهستی داریم: } (23)^6 + 16 \equiv 1 + 16 \Rightarrow A \equiv 17$$

اما 17 از پیمانه 11 بزرگ‌تر است، در نتیجه:

$$17 = 1(11) + 6 \Rightarrow 17 \equiv 6 \Rightarrow A \equiv 6$$

۱۱- بیان ریاضی مسئله به صورت زیر است:

$$7x - 3 \equiv 0 \Rightarrow 7x \equiv 3$$

دو بار پیمانه 9 تایی را به عدد 3 اضافه می‌کنیم تا طرف راست بر 7 بخش پذیر شود:

$$7x \equiv 3 + 2(9) \Rightarrow 7x \equiv 21$$

آزمون شماره ۲ (نوبت اول)

۱- الف) $(a, b) = d$ اگر و تنها اگر:

۱) $d \mid a, d \mid b$

۲) $\forall m > 0: m \mid a, m \mid b \Rightarrow m \leq d$

ب) $a \mid b \Rightarrow [a, b] = |b|$

پ) $[1]_{\varphi} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 4k + 1\}$

ت) $A \equiv 1 + 2 + 5 + 8 + 1 + 1 + 2 \equiv 21 \equiv 3$

$A \equiv 1 - 2 + 5 - 8 + 1 - 1 + 2 \equiv -3 \equiv 8$

۲- الف) درست

ب) نادرست؛ معادله هم‌نهشتی $ax \equiv b \pmod{m}$ دارای جواب است اگر و تنها اگر $(a, m) \mid b$.

۳- الف) نادرست، مثال نقض: $x = \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4}$

واضح است که x^2 از x بزرگ‌تر نیست.

ب) دو عدد صحیح زوج متوالی را $2k, 2k+2$ در نظر می‌گیریم:

$(2k)(2k+2) = 4k^2 + 4k = 4k(k+1)$

اما $k(k+1)$ ضرب دو عدد صحیح متوالی است. پس حتماً زوج است. لذا $k(k+1)$ را می‌توان به فرم $2k'$ نوشت:

یعنی ضرب موردنظر مضرب ۸ است.

۴- فرض می‌کنیم n فرد نباشد (فرض خلف)، پس n زوج است.

$n = 2k \Rightarrow n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2) = 2k' =$ زوج

یعنی n^2 زوج می‌شود که این با فرض فردبودن n^2 در تناقض است. لذا فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

۵- $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \geq \frac{4}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$

در طرف چپ مخرج مشترک می‌گیریم:

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x}\sqrt{y}} \geq \frac{4}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$

چون x و y مثبت هستند با عمل طرفین وسطین داریم:

$\Leftrightarrow (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 \geq 4\sqrt{xy} \Leftrightarrow x + y + 2\sqrt{xy} \geq 4\sqrt{xy}$

$\Leftrightarrow x + y - 2\sqrt{xy} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$

رابطهٔ اخیر همواره مثبت است و همهٔ روابط برگشت‌پذیر هستند، لذا اثبات تمام است.

۶- فرض می‌کنیم $a \mid b$ و $a \mid c$ باید نشان دهیم:

$\begin{cases} a \mid b \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Z}; b = aq \\ a \mid c \Rightarrow \exists q' \in \mathbb{Z}; c = aq' \end{cases}$

از جمع و تفریق دو طرف تساوی داریم:

$b \pm c = aq \pm aq' = a(q \pm q') \Rightarrow b \pm c = aq'' \Rightarrow a \mid b \pm c$

۷- دو عدد صحیح و فرد متوالی را $2k+1$ و $2k+3$ نشان می‌دهیم. فرض می‌کنیم $d = (2k+1, 2k+3)$ باشد. در نتیجه:

$\begin{cases} d \mid 2k+3 \\ d \mid 2k+1 \end{cases} \xrightarrow{\text{قانون تفاضل}} d \mid (2k+3) - (2k+1) \Rightarrow d \mid 2$

در نتیجه $d=1$ یا $d=2$.

اگر $d=1$ باشد که مسئله تمام است و هر دو عدد صحیح فرد متوالی نسبت به هم اول خواهند بود.

اگر $d=2$ باشد آن‌گاه چون $d \mid 2k+1$ و $d \mid 2k+3$ پس یک عدد زوج دو عدد فرد را عاد کرده است که این امکان ندارد. پس نسبت به هم اولند.

اکنون طرفین را بر ۷ تقسیم می‌کنیم:

$\begin{cases} 7x \equiv 21 \\ (7, 9) = 1 \end{cases} \xrightarrow{\div 7} x \equiv 3 \Rightarrow x = 9q + 3$

یعنی هر عدد صحیح به فرم $x = 9q + 3$ دارای خاصیت گفته‌شده می‌باشد.

۱۲- اولاً $(6, 14) = 2 \mid 10$ ، پس معادله در مجموعهٔ اعداد صحیح جواب دارد. برای حل، کل معادله را بر دو تقسیم می‌کنیم:

$3x + 7y = 5 \Rightarrow 7y \equiv 5$

اما $1, 7 \equiv -1, 5 \equiv 3$ در نتیجه:

$y \equiv -1 \Rightarrow y = 3k - 1$

با جای‌گذاری y مقدار x را محاسبه می‌کنیم:

$3x + 7(3k - 1) = 5 \Rightarrow 3x = -21k + 12$

$\Rightarrow x = -7k + 4 \Rightarrow \begin{cases} x = -7k + 4 \\ y = 3k - 1 \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

۱۳- مجموعهٔ رئوس را با $V(G)$ و مجموعهٔ یال‌ها را با $E(G)$ نمایش می‌دهیم.

مجموعهٔ رئوس و یال‌های گراف G_1 عبارت‌اند از: $V(G_1) = \{a, b, c, d, e\}$

$E(G_1) = \{ab, ae, bc, cd, de\}$

مجموعهٔ رئوس و یال‌های گراف G_2 عبارت‌اند از: $V(G_2) = \{a, b, c, d, e\}$

$E(G_2) = \{ab, ae, bc, cd, de\}$

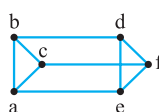
چون $E(G_1) = E(G_2)$ و $V(G_1) = V(G_2)$ پس دو نمودار داده‌شده مربوط به یک گراف هستند.

۱۴- الف)

$\deg(a) = 1, \deg(b) = 1, \deg(c) = 3$

$\deg(d) = 1, \deg(e) = 1, \deg(f) = 3$

ب) گراف ۳- منتظم یعنی درجهٔ همهٔ رئوس ۳ باشد. f و c که درجه‌شان ۳ است.



حال اگر d به e و b وصل شود و a هم به b و e ، آن‌گاه با توجه به شکل درجهٔ تمام رئوس برابر ۳ است، پس یک گراف ۳- منتظم مرتبهٔ ۶ داریم.

۱۵- الف) در گراف ۳- منتظم مرتبهٔ p ، درجهٔ همهٔ رئوس برابر ۳ است پس تعداد یال‌ها

$q = \frac{3 \times p}{2}$ خواهد بود. طبق فرض اگر به این تعداد یال، ۶ یال دیگر اضافه کنیم گراف کامل حاصل می‌شود. در نتیجه:

$\frac{3p}{2} + 6 = \frac{p(p-1)}{2}$

تعداد یال‌های گراف کامل k_p است.

$\Rightarrow 3p + 12 = p^2 - p \Rightarrow p^2 - 4p - 12 = 0$

$\Rightarrow (p-6)(p+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} p=6 \Rightarrow q = \frac{3 \times 6}{2} = 9 \\ p=-2 \text{ غ ق ق} \end{cases}$



ب) باید یک گراف ۳- منتظم مرتبهٔ ۶ (که دارای ۹ یال خواهد بود) رسم کنیم.

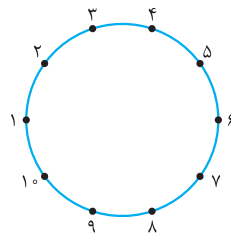
۱۶- الف) مسیر از a به c یعنی از a شروع کنیم.

$abedc \Rightarrow$ طول مسیر = ۴ یا $adebc \Rightarrow$ طول مسیر = ۴

ب) ۳ تا دور به طول ۴ دارد که عبارت‌اند از:

$abeda \quad abcda \quad cbedc$

آزمون شماره ۹ (نوبت دوم)



الف) ابتدا عدد احاطه‌گری را پیدا می‌کنیم: $n = 10$
 $\Delta = 2 \Rightarrow \gamma(C_{10}) = \left[\frac{10}{2+1} \right] = 4$

پس باید یک ۴-مجموعه بنویسیم:

$D = \{1, 4, 7, 10\}$ (ب)

$D = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ (ب)

$D = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ (ب)

جایگشت ۵ عدد $3!$ × جایگشت ۲ یک دسته داخل دسته

۱۱- کل حروف، ۷ تا است که دو بار «ج»، دو بار «ی» و دو بار «ر» تکراری هستند.

$\frac{7!}{2!2!2!}$

۱۲- تعداد کل انتخابی از نوع x_i (i = 1, 2, ..., 6) نشان می‌دهیم:

$x_1 + x_2 + \dots + x_6 = 10$

$x_2 \geq 4$

$x_6 > 2$

$x_1 + x_2 + \dots + x_6 = 10$

شرطها را کامل می‌کنیم:

$$\left. \begin{matrix} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 4 \\ x_4 \geq 0 \\ x_5 \geq 0 \\ x_6 \geq 3 \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\oplus} \text{مجموع شرطها} = 7 \Rightarrow 10 - 7 = 3$$

$x_1 + x_2 + \dots + x_6 = 3$

$\Rightarrow \binom{3+5}{5} = \binom{8}{5} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{5 \times 4 \times 3 \times 2} = 56$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

$AB = \begin{bmatrix} 21 & 32 & 13 \\ 33 & 11 & 22 \\ 12 & 23 & 31 \end{bmatrix}$

۱۳

چون در مربع AB عدد دورقمی تکراری نداریم، پس A و B متعامدند.

$S = \{1, 2, 3, \dots, 30\}$ (۱۴)

A = {اعداد بخش‌پذیر بر ۴}

$|A| = \left[\frac{30}{4} \right] = 7$

B = {اعداد بخش‌پذیر بر ۵}

$|B| = \left[\frac{30}{5} \right] = 6$

$A \cap B = \{اعداد بخش‌پذیر بر ۲۰\}$

$|A \cap B| = \left[\frac{30}{20} \right] = 1$

$|A - B| = |A| - |A \cap B| = 7 - 1 = 6$

۱۵- برای این که مجموع دو عدد زوج باشد هر دو عدد یا باید زوج باشند و یا هر دو فرد؛ بنابراین تعداد لانه‌ها برابر ۲ و تعداد کبوترها ۳ است. چون $3 > 2$ طبق اصل لانه‌کبوتری حداقل یک لانه وجود دارد که دو کبوتر در آن قرار می‌گیرد. یعنی حداقل دو عدد طبیعی از بین سه عدد وجود دارد که مجموعشان زوج خواهد شد.

۱- الف) درست؛ در هر سه عدد متوالی حداقل یکی زوج است پس ضرب سه عدد متوالی زوج خواهد بود.

در هر سه عدد متوالی دقیقاً یکی بر سه بخش‌پذیر است پس حاصل ضرب آن‌ها بر سه بخش‌پذیر است.

در نتیجه عدد زوجی که بر سه بخش‌پذیر باشد بر ۶ نیز بخش‌پذیر است.

(ب) نادرست؛ مثال نقض:

$x = 0, y = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0^2 + 1^2 = (x+y)^2 = (0+1)^2 \Rightarrow 1 = 1 \checkmark$

۲- الف) عدد a شماره‌دهنده عدد b است.

(ب) $2 | m$ زیرا:

$(2m, 6m^2) = (2m, 2 \times 3 \times m^2) = 2m$

چون m صحیح است می‌تواند منفی باشد و ب.م.م باید مثبت باشد پس برای m باید قدرمطلق بگذاریم.

۳- دو عدد حقیقی را x و y در نظر می‌گیریم:

$xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2} \Leftrightarrow 2xy \leq x^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$

$\Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$

گزارهٔ اخیر همواره درست است و تمامی روابط برگشت‌پذیرند.

۴- از تقسیم هر عدد صحیح بر ۴، باقی‌مانده صفر یا ۱ یا ۲ یا ۳ خواهد بود. عدد اول $p \geq 5$ را در نظر می‌گیریم. در تقسیم بر ۴ داریم:

$p = 4k$ یا $p = 4k + 1$ یا $p = 4k + 2$ یا $p = 4k + 3$

اگر $p = 4k$ ، آن‌گاه عدد اول p بر ۴ بخش‌پذیر است که با اول بودن p در تناقض است.

اگر $p = 4k + 2$ آن‌گاه:

یعنی p زوج است اما اعداد اول به غیر از ۲ همگی فردند پس باز هم تناقض است.

در نتیجه $p = 4k + 1$ یا $p = 4k + 3$.

۵- $1000 \equiv 6 \equiv -1 \pmod{25}$ به توان ۲۵ می‌رسانیم $(1000)^{25} \equiv (-1)^{25} \equiv -1$

۶- $A = (1000)^{25} \times 9 + 11 \equiv (-1) \times 9 + 11 \equiv -9 + 11 \equiv 2$ باقی‌مانده = ۲

$7x \equiv 1 \pmod{4}$ اولاً $7 \equiv 3 \pmod{4}$

$\Rightarrow 3x \equiv 1 \pmod{4} \xrightarrow{\times 3} x \equiv -1 \pmod{4} \Rightarrow x = 4k - 1, k \in \mathbb{Z}$

۷- الف) $N_G(c) = \{a, d, e\}$

(ب) رأس f در گراف G از درجهٔ صفر است. این رأس در گراف \bar{G} از درجهٔ ۵ خواهد بود.

(پ) abceda

(ت) خیر، زیرا رأس f از درجهٔ صفر (تنها) است.

۸- مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم، مجموعهٔ احاطه‌گری است که کم‌ترین تعداد عضو را دارد ولی مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال مجموعهٔ احاطه‌گری است که با حذف هر یک از رؤس آن دیگر احاطه‌گر نیست و می‌تواند از مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم بیشتر عضو داشته باشد. در واقع هر احاطه‌گر مینیمم، حتماً مینیمال هم هست ولی برعکس آن لزوماً برقرار است.

۹- $D = \{a, c, i, d\}$

یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال است که با حذف هر یک از عضوهایش دیگر احاطه‌گر نیست.

۱۰- $n = 10, \Delta = 4 \Rightarrow \gamma(G) \geq \left[\frac{n}{\Delta + 1} \right] = \left[\frac{10}{5} \right] = 2 \Rightarrow \gamma \geq 2$

از طرفی مجموعهٔ $D = \{e, j\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است پس $\gamma(G) \leq 2$. در نتیجه:

$\gamma(G) = 2$

۱۱- الف) درست؛ در هر سه عدد متوالی حداقل یکی زوج است پس ضرب سه عدد متوالی زوج خواهد بود.

در هر سه عدد متوالی دقیقاً یکی بر سه بخش‌پذیر است پس حاصل ضرب آن‌ها بر سه بخش‌پذیر است.

در نتیجه عدد زوجی که بر سه بخش‌پذیر باشد بر ۶ نیز بخش‌پذیر است.

(ب) نادرست؛ مثال نقض:

$x = 0, y = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0^2 + 1^2 = (x+y)^2 = (0+1)^2 \Rightarrow 1 = 1 \checkmark$

۲- الف) عدد a شماره‌دهنده عدد b است.

(ب) $2 | m$ زیرا:

$(2m, 6m^2) = (2m, 2 \times 3 \times m^2) = 2m$

چون m صحیح است می‌تواند منفی باشد و ب.م.م باید مثبت باشد پس برای m باید قدرمطلق بگذاریم.

۳- دو عدد حقیقی را x و y در نظر می‌گیریم:

$xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2} \Leftrightarrow 2xy \leq x^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$

$\Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$

۱۶- الف) تعداد توابع پوشا از یک مجموعه ۴ عضوی به ۳ عضوی:

$$3^4 - (2^4 + 2^4 + 2^4 - 1^4 - 1^4 - 1^4 + 0^4)$$

$$= 81 - (16 + 16 + 16 - 1 - 1 - 1) = 81 - 45 = 36$$

ب) تعداد توابع ۱-۱ از یک مجموعه ۴ عضوی به یک مجموعه ۸ عضوی:

$$\frac{8!}{(8-4)!} = \frac{8!}{4!}$$

$$k+1=5 \Rightarrow k=4$$

$$k \times (\text{تعداد لانه}) + 1 \leq \text{حداقل تعداد کیبوتر} \Rightarrow 4n+1 \leq 54$$

$$\Rightarrow 4n \leq 53 \Rightarrow n \leq \left\lfloor \frac{53}{4} \right\rfloor = 13$$

یعنی حداکثر ۱۳ تا گلدان می توان داشت.

آزمون شماره ۱۰ (نوبت دوم)

۱- الف) نادرست

اگر $a \mid b$ و $b \neq 0$ ، در این صورت $|a| \leq |b|$

ب) درست (تعریف ک.م.م)

پ) درست

$$(-2, 4) = |-2| = 2$$

ت) نادرست

$$n = 2k \text{ زوج}$$

۲-

$$\Rightarrow n^2 - 5n + 7 = (2k)^2 - 5(2k) + 7 = 4k^2 - 10k + 7$$

$$= \underbrace{4k^2 - 10k + 6 + 1} = 2(2k^2 - 5k + 3) + 1 = 2k' + 1 = \text{فرد}$$

۳-

$$5 \mid 4k+1 \xrightarrow{\text{توان } 2} 25 \mid (4k+1)^2$$

$$\Rightarrow 25 \mid 16k^2 + 8k + 1 \quad (1)$$

از طرفی از رابطه $5 \mid 4k+1$ می توان طرفین را در ۵ ضرب کرد:

$$25 \mid 20k + 5 \quad (2)$$

$$25 \mid 16k^2 + 28k + 6$$

از جمع دو رابطه (۱) و (۲) داریم:

۴-

$$A = 27^{20} + 18 \equiv 13$$

اولاً: $27 \equiv 1 \pmod{13}$ در نتیجه:

$$27^{20} \equiv 1^{20} \pmod{13} \Rightarrow 27^{20} \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow 27^{20} + 18 \equiv 1 + 18 \equiv 19 \equiv 6 \pmod{13} \Rightarrow A \equiv 6$$

۵- تعداد روزهای بین اول مهر تا ۱۲ بهمن را حساب می کنیم:

| | | | | |
|------|----|-----|------|------|
| بهمن | دی | آذر | آبان | مهر |
| ۱۲ | ۳۰ | ۳۰ | ۳۰ | ۳۰-۱ |

$$\Rightarrow 29 + 30 + 30 + 30 + 12 = 131$$

اکنون ۱۳۱ را در هم نهشتی به پیمانه ۷ محاسبه می کنیم:

| | | | | | | |
|------|--------|--------|---------|----------|---------|------|
| شنبه | یکشنبه | دوشنبه | سه شنبه | چهارشنبه | پنجشنبه | جمعه |
| ۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ |

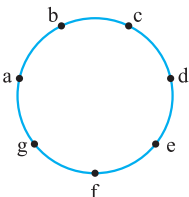
عدد ۵ متناظر با پنجشنبه است؛ پس ۱۲ بهمن ماه پنجشنبه است.

۶- الف) رأس فرد گراف تهی

ب) $q = \frac{4 \times 3}{2} = 6$

ت) همبند

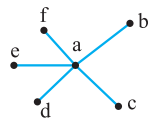
۷- الف)



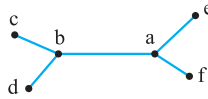
مسیر به طول ۵ از a به f: abcdef است.

۱۱- الف)

رأس a به همه رئوس دیگر وصل است پس مجموعه $D = \{a\}$ احاطه گر مینیمم است پس $\gamma(G) = 1$.



ب)



$$D = \{a, b\} \Rightarrow \gamma(G) = 2$$

۱۲- الف)

$$\frac{6!}{2 \times 1} = 2 \times 6! \times 1 = 2! \times 6!$$

ب)

$$1, 2, 4, 5, 6, 8 \Rightarrow 7! \times 2!$$

۱۳- اگر تعداد گل انتخابی از نوع آم را با x_i نشان دهیم آن گاه:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 12$$

$$x_1 \geq 1, x_4 > 3, x_6 = 1$$

با شرایط مسئله:

$$x_1 \geq 1, x_4 \geq 4$$

پس:

$$x_2 \geq 0, x_5 \geq 0$$

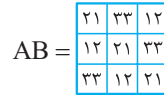
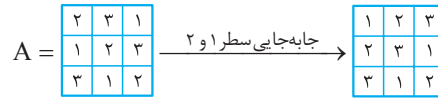
$$x_3 \geq 0, x_6 = 1$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 1 = 12 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11$$

$$\text{مجموع شرطها: } 1 + 0 + 0 + 4 + 0 = 5 \Rightarrow 11 - 5 = 6$$

$$\Rightarrow \binom{6+4}{4} = \binom{10}{4} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 210$$

۱۴-



بررسی متعامد بودن:

متعامد نیستند زیرا در مربع لاتین آخر عدد دورقمی تکراری داریم.

۱۵- روش اول

$$34 \text{ نفر} = \text{کل کلاس}$$

$$|F| = 15 \text{ فوتبال}$$

$$|V| = 11 \text{ والیبال}$$

$$|B| = 9 \text{ بسکتبال}$$

$$|F \cap V| = 5 \text{ فوتبال و والیبال}$$

$$|B \cap V| = 6 \text{ بسکتبال و والیبال}$$

$$|F \cap B| = 3 \text{ فوتبال و بسکتبال}$$

$$|F \cap V \cap B| = 3 \text{ فوتبال، والیبال و بسکتبال}$$

$$|F| - |F \cap V| - |F \cap B| + |F \cap B \cap V|$$

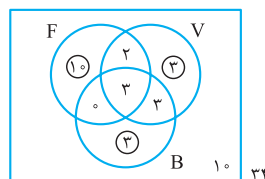
$$= 15 - 5 - 3 + 3 = 10$$

$$|V| - |F \cap V| - |V \cap B| + |F \cap B \cap V|$$

$$= 11 - 5 - 6 + 3 = 3$$

$$|B| - |F \cap B| - |V \cap B| + |F \cap B \cap V|$$

$$= 9 - 3 - 6 + 3 = 3 \Rightarrow \text{جواب نهایی} = 10 + 3 + 3 = 16$$



روش دوم: استفاده از نمودار ون:

$$16 = 10 + 3 + 3 \text{ فقط یک رشته}$$

درس نامه توپ برای شب امتحان

حالت دوم: n فرد باشد، در این صورت: $n = 2k + 1$; $k \in \mathbb{W}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow n^2 + n &= (2k+1)^2 + (2k+1) \\ &= 4k^2 + 4k + 1 + 2k + 1 = 4k^2 + 6k + 2 = 2(\underbrace{2k^2 + 3k + 1}_{k'}) = 2k' \end{aligned}$$

پس همواره $n^2 + n$ زوج است.

مثال: فرض کنید $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $B = \{3, 4\}$. اگر $x \in A$ و $\frac{x^2(x+1)^2}{4}$ زوج باشد، ثابت کنید $x \in B$.

پاسخ: با در نظر گرفتن همه حالت‌های $x \in A$ ، مسئله را ثابت می‌کنیم.

$$x = 1 \Rightarrow \frac{x^2(x+1)^2}{4} = \frac{1 \times 4}{4} = 1$$

حاصل زوج نیست، پس مورد بحث قرار نمی‌گیرد.

$$x = 2 \Rightarrow \frac{x^2(x+1)^2}{4} = \frac{4 \times 9}{4} = 9$$

حاصل زوج نیست، پس مورد بحث قرار نمی‌گیرد.

$$x = 3 \Rightarrow \frac{x^2(x+1)^2}{4} = \frac{9 \times 16}{4} = 36$$

حاصل زوج است و مشخص است که $x = 3$ عضو B است.

$$x = 4 \Rightarrow \frac{x^2(x+1)^2}{4} = \frac{16 \times 25}{4} = 100$$

حاصل زوج است و مشخص است که $x = 4$ عضو B است.

$$x = 5 \Rightarrow \frac{x^2(x+1)^2}{4} = \frac{25 \times 36}{4} = 225$$

حاصل زوج نیست، پس مورد بحث قرار نمی‌گیرد.

مثال: با در نظر گرفتن همه حالت‌های ممکن، ثابت کنید حاصل ضرب هر سه عدد طبیعی متوالی همواره بر ۶ بخش پذیر است.

پاسخ: در مثال اول این بخش ثابت کردیم برای هر عدد طبیعی n ، $n^2 + n$ زوج است.

$$n^2 + n = n(n+1) = \text{ضرب دو عدد متوالی}$$

یعنی ضرب دو عدد متوالی، همواره زوج است و در نتیجه ضرب سه عدد متوالی نیز همواره زوج خواهد بود؛ پس بر ۲ بخش پذیر است. در ادامه نشان می‌دهیم ضرب سه عدد متوالی بر ۳ هم بخش پذیر است که از این دو نتیجه می‌گیریم که ضرب سه عدد متوالی بر ۶ بخش پذیر است.

با در نظر گرفتن حالت‌های $n = 3k$ ، $n = 3k + 1$ ، $n = 3k + 2$ داریم:

$$n = 3k \Rightarrow n(n+1)(n+2) = (3k)(3k+1)(3k+2)$$

$$= 3(\underbrace{k(3k+1)(3k+2)}_{k'}) = 3k'$$

$$n = 3k + 1 \Rightarrow n(n+1)(n+2) = (3k+1)(3k+2)(3k+3)$$

$$= (3k+1)(3k+2)(3)(k+1) = 3(\underbrace{(3k+1)(3k+2)(k+1)}_{k'}) = 3k'$$

$$n = 3k + 2 \Rightarrow n(n+1)(n+2) = (3k+2)(3k+3)(3k+4)$$

$$= (3k+2)(3)(k+1)(3k+4) = 3(\underbrace{(3k+2)(k+1)(3k+4)}_{k'}) = 3k'$$

پس در هر سه حالت ممکن، $n(n+1)(n+2)$ مضرب ۳ است. در نتیجه $n(n+1)(n+2)$ مضرب ۶ است.

فصل ۱: آشنایی با نظریه اعداد

درس ۱: استدلال ریاضی

مثال نقض: به مثالی که نشان دهد یک نتیجه‌گیری کلی غلط است مثال نقض می‌گوییم.

مثال: برای نتیجه‌گیری‌های کلی زیر مثال نقض بیاورید.

(الف) برای هر عدد حقیقی x و y : $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

(ب) مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.

(پ) مجموع هر دو عدد اول، عددی مرکب است.

(ت) عدد $2^{2^n} + 1$ به ازای همه عددهای طبیعی n ، عددی اول است.

(ث) برای هر عدد طبیعی n ، عدد $3^n + 4$ اول است.

(ج) هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموع اعداد طبیعی متوالی نوشت.

پاسخ: (الف) قرار می‌دهیم $x = 16$ و $y = 9$ آن‌گاه:

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{x+y} &= \sqrt{9+16} = 5 \\ \sqrt{x} &= \sqrt{16} = 4 \\ \sqrt{y} &= \sqrt{9} = 3 \end{aligned} \right\} 5 \neq 4+3$$

(ب) اگر دو عدد گنگ را $\sqrt{3}$ و $-\sqrt{3}$ در نظر بگیریم، آن‌گاه: $\sqrt{3} + (-\sqrt{3}) = 0$ و صفر عددی گویاست.

(پ) برای دو عدد اول ۲ و ۳، مجموع آن‌ها ۵ می‌شود که عددی مرکب نیست.

(ت) برای $n = 1, 2, 3, 4$ حاصل $2^{2^n} + 1$ اول است، اما برای $n = 5$ داریم:

$$2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 641 \times 6700417$$

که عددی اول نیست.

(ث) برای $n = 1, 2, 3$ ، حاصل $3^n + 4$ اول است، اما برای $n = 4$ داریم:

$$3^4 + 4 = 81 + 4 = 85$$

و ۸۵ عددی اول نیست.

(ج) برای $n = 2$ گزاره برقرار نیست. زیرا عدد ۲ را نمی‌توان به صورت مجموع دو عدد طبیعی متوالی نوشت. (هر عدد به فرم $n = 2^k$ ، $k \in \mathbb{N}$ مثال نقض است.)

تذکره: دیدیم که مثال نقض، روشی برای نشان دادن نادرستی یک گزاره است. برای اثبات درستی یک گزاره، روش‌های مختلفی وجود دارد که عبارت‌اند از: اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها، اثبات مستقیم، اثبات غیرمستقیم یا برهان خلف و اثبات به روش بازگشتی.

اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها

گاهی برای اثبات یک گزاره لازم است همه موارد ممکن در مورد مسئله را در نظر بگیریم.

مثال: ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n ، $n^2 + n$ عددی زوج است.

پاسخ: با در نظر گرفتن همه حالت‌های ممکن برای n ، مسئله را اثبات می‌کنیم.

حالت اول: $n = 2k$; $k \in \mathbb{N}$

زوج باشد، در این صورت:

$$\Rightarrow n^2 + n = (2k)^2 + 2k = 4k^2 + 2k = 2(\underbrace{2k^2 + k}_{k'}) = 2k'$$

پس $n^2 + n$ زوج است.

اگر $r = 3$ ، آن گاه: $n^2 = \Delta k + 9 = \frac{\Delta k + \Delta + 4}{\Delta(k+1)} = \Delta k' + 4$

اگر $r = 4$ ، آن گاه: $n^2 = \Delta k + 16 = \frac{\Delta k + 1\Delta + 1}{\Delta(k+2)} = \Delta k' + 1$

پس n^2 در تقسیم بر Δ ، دارای باقی مانده غیر صفر است؛ یعنی n^2 نمی تواند مضرب Δ باشد و این نتیجه با فرض اولیه متضاد است. پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

اثبات بازگشتی

دو حکم را معادل یا هم ارز می گوئیم هر گاه بتوان درستی هر یک را از درستی دیگری نتیجه گرفت. گاهی برای اثبات یک حکم، آن را به حکمی ساده تر تبدیل می کنیم که با حکم اولیه هم ارز باشد و این کار را آن قدر ادامه می دهیم تا به حکمی برسیم که درستی آن معلوم است.

به این ترتیب بازگشت از حکم آخر، درستی حکم اولیه را نتیجه می دهد. به این روش، اثبات بازگشتی می گوئیم.

مثال: به روش بازگشتی ثابت کنید: اگر $x, y > 0$ آن گاه $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$

پاسخ: $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2}{xy} \geq 2$

کل نامساوی را در xy ضرب می کنیم. چون x و y هر دو مثبت هستند، جهت نامساوی عوض نمی شود.

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$

رابطه آخر همواره برقرار است و تمامی روابط برگشت پذیرند. بنابراین حکم ثابت شده است.

مثال: به روش بازگشتی نشان دهید برای هر سه عدد حقیقی x و y و z داریم:

$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$

پاسخ: کل نامساوی را در عدد ۲ ضرب می کنیم:

$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2yz + 2zx$

$\Leftrightarrow x^2 + x^2 + y^2 + y^2 + z^2 + z^2 \geq 2xy + 2yz + 2zx$

$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 - 2xy) + (x^2 + z^2 - 2zx) + (y^2 + z^2 - 2yz) \geq 0$

$\Leftrightarrow (x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2 \geq 0$

رابطه آخر همواره برقرار است و تمامی روابط برگشت پذیرند پس حکم ثابت شده است.

مثال: اگر n یک عدد طبیعی باشد آیا زوج بودن n و زوج بودن n^2 هم ارزند؟ چرا؟

پاسخ: بله هم ارزند. برای اثبات باید نشان دهیم: n زوج است. $\Leftrightarrow n^2$ زوج است.

مرحله ۱: فرض می کنیم n زوج باشد، آن گاه:

$n = 2k \Rightarrow n^2 = 4k^2 = 2\left(\frac{2k^2}{k'}\right) = 2k'$

پس n^2 هم زوج است.

مرحله ۲: فرض می کنیم n^2 زوج باشد آن گاه نشان می دهیم n نیز زوج است. به روش برهان خلف؛ فرض می کنیم n زوج نباشد. (فرض خلف) پس n فرد است.

$n = 2k + 1 \Rightarrow n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$

$= 2(\underbrace{2k^2 + 2k}_{k'}) + 1 = 2k' + 1$

یعنی n^2 نیز فرد می شود که با فرض زوج بودن n^2 متضاد است. پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

اثبات به روش مستقیم

در روش مستقیم به کمک فرض و با استفاده از حقایقی که درستی آن ها را پذیرفته ایم، حکم را نتیجه می گیریم.

مثال: نشان دهید مربع هر عدد فرد به صورت $4q + 1$ است.

پاسخ: فرض می کنیم n عددی فرد باشد، آن گاه:

$n = 2k + 1, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k + 1) + 1$

اما $k + 1$ و k دو عدد متوالی اند، پس حاصل ضرب آن ها همواره زوج است. در نتیجه $k(k + 1) = 2q$ ؛ بنابراین:

مثال: اگر a و b دو عدد صحیح باشند و ab عددی فرد باشد، ثابت کنید: $a^2 + b^2$ زوج است.

پاسخ: می دانیم حاصل ضرب دو عدد صحیح a و b زمانی فرد است که هر دوی آن ها فرد باشند، پس:

فرد $a =$ فرد b ، $ab =$ فرد \Rightarrow فرد $a =$ فرد b ، در مثال قبل ثابت کردیم مربع هر عدد فرد به صورت $4q + 1$ است. در نتیجه:

$$\begin{cases} a^2 = 4q + 1 \\ b^2 = 4q' + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} a^2 + b^2 &= 4q + 1 + 4q' + 1 \\ &= 4q + 4q' + 2 = 4(q + q') + 2 \\ &= 2(\underbrace{2(q + q') + 1}_k) = 2k = \text{زوج} \end{aligned}$$

اثبات غیر مستقیم (برهان خلف)

در روش برهان خلف، فرض می کنیم که حکم نادرست باشد، سپس با استفاده از این فرض (که فرض خلف نامیده می شود) و فرض اولیه و حقایقی که از قبل درستی آن ها را پذیرفته ایم، به یک نتیجه غیر ممکن یا متضاد با فرض اولیه می رسیم.

مثال: به روش برهان خلف ثابت کنید: اگر n^2 عددی گنگ باشد، آن گاه n نیز عددی گنگ است.

پاسخ: فرض می کنیم n گنگ نباشد (فرض خلف)، در نتیجه n گویاست. می دانیم حاصل ضرب هر دو عدد گویا، گویا، گویاست. پس $n \times n = n^2$ نیز گویاست. این نتیجه با فرض اولیه مسئله که « n^2 گنگ است» متضاد است. بنابراین فرض خلف باطل و n گنگ خواهد بود.

مثال: به روش برهان خلف ثابت کنید: معکوس هر عدد گنگ، گنگ است.

پاسخ: ابتدا مسئله را به زبان ریاضی بیان می کنیم: می خواهیم ثابت کنیم: اگر x گنگ باشد، آن گاه $\frac{1}{x}$ نیز گنگ است. برای اثبات فرض می کنیم $\frac{1}{x}$ گنگ نباشد، (فرض خلف) پس

$\frac{1}{x}$ گویا است. بنابراین برابر عدد گویای ناصفری مانند $\frac{a}{b}$ است که $a, b \in \mathbb{Z}$ ، a و $b \neq 0$

گویا $\frac{1}{x} = \frac{a}{b} \Rightarrow x = \frac{b}{a}$

یعنی x هم گویا است و این با فرض اولیه مسئله در تضاد است. بنابراین فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

مثال: به روش برهان خلف ثابت کنید: اگر n عدد طبیعی و n^2 مضرب ۵ باشد، آن گاه n نیز مضرب ۵ است.

پاسخ: فرض می کنیم n مضرب ۵ نباشد (فرض خلف) در نتیجه از تقسیم n بر ۵، باقی مانده غیر صفر خواهیم داشت:

$n = 5q + r, r = 1 \text{ یا } 2 \text{ یا } 3 \text{ یا } 4$

$\Rightarrow n^2 = 25q^2 + 10qr + r^2$

$= 5(\underbrace{5q^2 + 2qr}_k) + r^2 = 5k + r^2$

اگر $r = 1$ ، آن گاه: $n^2 = 5k + 1$

اگر $r = 2$ ، آن گاه: $n^2 = 5k + 4$